

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования



**Пермский национальный исследовательский
политехнический университет**

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной
деятельности

 А.Б. Петроченков

« 13 » февраля 20 23 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина: Алгебра и геометрия 3. Дифференциальная геометрия и основы
ТОПОЛОГИИ
(наименование)

Форма обучения: очная
(очная/очно-заочная/заочная)

Уровень высшего образования: бакалавриат
(бакалавриат/специалитет/магистратура)

Общая трудоёмкость: 216 (6)
(часы (ЗЕ))

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика
(код и наименование направления)

Направленность: Математическое моделирование (СУОС)
(наименование образовательной программы)

1. Общие положения

1.1. Цели и задачи дисциплины

Цель учебной дисциплины — формирование комплекса знаний, умений и навыков по владению дифференциально-геометрическими понятиями и применению подходов и методов дифференциальной геометрии к описанию и исследованию объектов и систем, берущих начало в прикладной математике, и используемых при математическом моделировании физико-механических систем и процессов.

Задачи учебной дисциплины

- изучение понятий дифференциально-геометрического происхождения, в частности, понятий топологических пространств, многообразий, касательных расслоений, строения многообразий, видов вводимых на многообразиях структур и приобретаемых вследствие этого свойств (от топологических до Римановых пространств), понятий кривых на многообразиях, гиперповерхностей, век-торов и тензоров на многообразиях, внешних форм, их свойств и операций над ними, включая производную Ли, внешнюю производную, градиент, абсолютную производную, а также изучение теории кривых и поверхностей в трехмерном пространстве;
- формирование умения применять основные понятия дифференциально-геометрического происхождения для описания свойств и структуры произвольных многообразий, использовать теорию внешних форм для исследования свойств дифференцируемых многообразий, находить производные Ли, абсолютную производную, градиент от различных тензоров и полилинейных форм, применять обобщенную теорему Стокса и следствия из нее для различных многообразий, работать с аффинной связностью, определять тензоры кручения, Римана-Кристоффеля, исследовать геометрический смысл дифференциальных операторов на многообразиях, описывать свойства кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве;
- формирование навыков владения понятиями и методами дифференциально-геометрического происхождения, работы с векторами, тензорами, внешними формами на произвольных многообразиях, владения теорией внешних форм, работы с производными Ли, абсолютной производной, градиентом от тензоров и полилинейных форм, применения обобщенной теоремы Стокса и следствий из нее, исследования кривых и поверхностей как Римановых пространств в трехмерном евклидовом пространстве.

1.2. Изучаемые объекты дисциплины

Пространства и многообразия различной структуры от топологических до Римановых пространств, касательные расслоения, их структура и свойства. Вводимые на них объекты, такие как векторы, тензоры, полилинейные формы, внешние формы, алгебраические и дифференциальные операции над ними (перенос и производная Ли, абсолютная производная, градиент, дивергенция), теорема Стокса и следствия из нее, аффинная связность, тензор кручения, тензор Римана-Кристоффеля, их геометрический смысл. Приложения введенных дифференциально-геометрических понятий к исследованию кривых и поверхностей как Римановых пространств, вложенных в евклидово пространство.

1.3. Входные требования

Не предусмотрены

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индекс индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (знать, уметь, владеть)	Индикатор достижения компетенции, с которым соотнесены планируемые результаты обучения	Средства оценки
-------------	-------------------	---	--	-----------------

Компетенция	Индекс индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (знать, уметь, владеть)	Индикатор достижения компетенции, с которым соотнесены планируемые результаты обучения	Средства оценки
ПК-1.1	ИД-1ПК-1.1	<p>Знает:</p> <ul style="list-style-type: none"> – основы теории кривых и поверхностей в трехмерном пространстве; – определения и свойства топологических пространств, многообразий, касательных расслоений, строение многообразий; – виды вводимых на многообразиях структур и приобретаемые вследствие этого свойства (от топологических до Римановых пространств); – определения и свойства кривых на многообразиях, гиперповерхностей, векторов и тензоров на многообразиях, внешних форм, их свойств и операций над ними, включая производную Ли, внешнюю производную, градиент, абсолютную производную; 	<p>Знает парадигму и основные концепции развития прикладной математики и математического моделирования, современные подходы и методы проведения научных исследований, современные и классические математические модели систем и процессов.</p>	Контрольная работа
ПК-1.1	ИД-2ПК-1.1	<p>Умеет:</p> <ul style="list-style-type: none"> – описывать свойства кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве; – применять основные понятия дифференциально-геометрического происхождения для описания свойств и структуры произвольных многообразий; – использовать теорию внешних форм для исследования свойств дифференцируемых многообразий, находить производные Ли, абсолютную производную, градиент от различных тензоров и полилинейных форм; – применять 	<p>Умеет анализировать возможности и применимость математических моделей, применять и модифицировать их для решения научных и прикладных задач, разрабатывать новые математические модели при выполнении научных исследований на современном уровне</p>	Курсовая работа

Компетенция	Индекс индикатора	Планируемые результаты обучения по дисциплине (знать, уметь, владеть)	Индикатор достижения компетенции, с которым соотнесены планируемые результаты обучения	Средства оценки
		<p>обобщенную теорему Стокса и следствия из нее для различных многообразий;</p> <p>– работать с аффинной связностью, определять тензор кручения, Римана-Кристоффеля, исследовать геометрический смысл дифференциальных операторов на многообразиях;</p>		
ПК-1.1	ИД-ЗПК-1.1	<p>Владеет:</p> <p>– навыками исследования кривых и поверхно-стей как Римановых пространств в трехмерном евклидовом пространстве.</p> <p>– навыками работы с векторами, тензорами, внешними формами на произвольных многообразиях;</p> <p>– навыками применения теории внешних форм, работы с производными Ли, абсолютной производной, градиентом от тензоров и полилинейных форм;</p> <p>– навыками применения обобщенной теоремы Стокса и следствий из нее.</p>	<p>Владеет навыками выполнения научно-исследовательской работы, применения и модификации известных математических моделей для получения новых научных и прикладных результатов</p>	Контрольная работа

3. Объем и виды учебной работы

Вид учебной работы	Всего часов	Распределение по семестрам в часах	
		Номер семестра	
		5	6
1. Проведение учебных занятий (включая проведение текущего контроля успеваемости) в форме:	106	36	70
1.1. Контактная аудиторная работа, из них:			
- лекции (Л)	48	16	32
- лабораторные работы (ЛР)			
- практические занятия, семинары и (или) другие виды занятий семинарского типа (ПЗ)	54	18	36
- контроль самостоятельной работы (КСР)	4	2	2
- контрольная работа			
1.2. Самостоятельная работа студентов (СРС)	110	36	74
2. Промежуточная аттестация			
Экзамен			
Дифференцированный зачет	9		9
Зачет	9	9	
Курсовой проект (КП)			
Курсовая работа (КР)			
Общая трудоемкость дисциплины	216	72	144

4. Содержание дисциплины

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
5-й семестр				
Основы топологии	4	0	4	8
Основные понятия, термины и определения. Предмет и задачи дисциплины. Роль и место дисциплины среди других дисциплин учебного плана. Тема 1. Топология арифметического пространства. Топологическое пространство Тема 2. Внутренности и замыкания, их свойства. Аксиомы отделимости				
Непрерывное отображение в топологических пространствах	4	0	4	8
Тема 3. Однозначное отображение в топологических пространствах. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм топологических пространств Тема 4. Связные множества в топологических пространствах. Индуцированная топология. Сужение на топологическом пространстве				

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
Дифференцируемое многообразие	2	0	2	4
Тема 5. Определение топологического многообразия и примеры. Дифференцируемое многообразие. Диффеоморфизм. Локальная и глобальная эквивалентность многообразий Тема 6. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Классификация связных многообразий. Подмногообразия				
Векторные и тензорные поля на многообразиях	6	0	8	16
Тема 7. Функции на многообразиях. Кривые на многообразиях. Касательное пространство. Касательное расслоение. Обобщенная дельта Кронекера и оператор альтернирования Тема 8. Сопряженное касательное пространство, линейные формы и их поля. Базис в сопряженном пространстве Тема 9. Внешнее произведение линейных форм, его свойства. Полилинейные формы и их поля на дифференцируемом многообразии. Тензоры и тензорные поля на дифференцируемом многообразии. Алгебраические операции над тензорами на дифференцируемом многообразии Тема 10. Внешние полилинейные формы, их внешнее произведение. Линейная зависимость/независимость векторов на произвольном дифференцируемом многообразии. Проверка ориентируемости многообразия с помощью внешних форм. Объем подобласти на многообразии Тема 11. Изоморфизм касательных пространств в точке многообразия. Операция дуализации. Внешняя производная полилинейных форм и тензоров				
ИТОГО по 5-му семестру	16	0	18	36
6-й семестр				
Простые дифференциальные структуры на дифференцируемых многообразиях	8	0	8	20
Тема 12. Точные и замкнутые формы. Лемма Пуанкаре. Конгруэнция векторного поля. Координатный и некоординатный базисы Тема 13. Перенос Ли, скобки Ли. Производная Ли скалярнозначной функции и векторного поля. Свойства производной Ли векторных полей в координатном и некоординатном базисе Тема 14. Производная Ли от линейной формы. Связь производной Ли и внешней производной для внешних форм Тема 15. Обобщенная теорема Стокса. Классификация многообразий и дифференциальных структур на многообразиях				

Наименование разделов дисциплины с кратким содержанием	Объем аудиторных занятий по видам в часах			Объем внеаудиторных занятий по видам в часах
	Л	ЛР	ПЗ	СРС
Аффинная связность на многообразии	12	0	10	20
Тема 16. Абсолютная производная. Градиент скалярнозначной функции и векторного поля на дифференцируемых многообразиях Тема 17. Коэффициенты связности. Ковариантная производная. Связь аб-солютной производной и производной Ли. Тензор кручения. Симметричная связность Тема 18. Геодезические линии на многообразиях. Геометрический смысл тензора кручения Тема 19. Тензор Римана-Кристоффеля. Определение, свойства, геометри-ческий смысл. Уравнение девиации геодезических линий Тема 20. Согласованность связности и объема. Скалярное произведение векторов на многообразии, метрика. Риманово пространство				
Теория кривых в Римановом пространстве	4	0	6	16
Тема 21. Теория кривых в n-мерном Римановом пространстве. Формулы Френе в n-мерном пространстве. Натуральные уравнения кривой				
Поверхности в трехмерном пространстве	8	0	12	18
Тема 22. Измерения на поверхности. Первая квадратичная форма поверх-ности. Изометричные поверхности. Изгибание поверхностей. Гауссова кри-визна поверхностей. Геодезическая кривизна поверхностных кривых Тема 23. Нормаль к поверхности. Вторая квадратичная форма поверхно-сти. Деривационные формулы Вейнгартена Тема 24. Кривизна кривой на поверхности. Нормальная кривизна поверхно-сти. Линии кривизны. Формулы Родриго Тема 25. Классификация точек поверхности. Индикатриса Дюпена. Асимптотические линии поверхности				
ИТОГО по 6-му семестру	32	0	36	74
ИТОГО по дисциплине	48	0	54	110

Тематика примерных практических занятий

№ п.п.	Наименование темы практического (семинарского) занятия
1	Аксиомы топологического пространства. Проверка выполнения аксиом для заданных примеров. Минимальная и максимальная топологии
2	Доказательство свойств внутренностей и замыканий. Проверка аксиом отделимости для заданных примеров
3	Доказательство свойств образов и прообразов.

№ п.п.	Наименование темы практического (семинарского) занятия
4	Компактность множеств, связность при непрерывных отображениях. Теоремы о связных множествах. Индуцированная топология. Сужение отображений
5	Проверка признаков дифференцируемого многообразия для заданных примеров
6	Построение атласов для заданных множеств, исследование их ориентируемости, проведение классификации
7	Доказательство свойств обобщенной дельты Кронекера. Представление определителей и миноров с ее помощью
8	Построение базиса в сопряженном пространстве
9	Доказательство свойств внешнего произведения линейных форм. Компонентное представление полилинейных внешних форм. Построение и вывод правил преобразования базисных элементов в пространстве внешних полилинейных форм при замене базиса в касательном пространстве
10	Внешняя форма, задающая объем на многообразии. Проверка линейной независимости и определение ориентации системы векторов с помощью внешней «формы объема». Вычисление формы объема в различных системах координат
11	Вычисление дуальных величин, двойная дуализация полилинейных форм и тензоров. Дуализация произведений. Внешняя производная линейных и полилинейных форм, векторов, тензоров. Дуализация внешней производной. Внешняя производная дуальных величин
12	Проверка замкнутости и точности заданных внешних форм
13	Доказательства свойств производной Ли
14	Вычисление производной Ли полилинейных и внешних форм
15	Применение теоремы Стокса и теоремы о дивергенции к заданным многообразиям в охватывающем пространстве различной размерности. Получение из них классических интегральных теорем и формул теории поля
16	Вычисление абсолютной производной векторов, линейных и полилинейных форм, внешних форм. Вычисление градиентов заданных скалярнозначных функций и векторных полей
17	Вывод правил преобразования коэффициентов аффинной связности при замене базиса в касательном пространстве. Вывод формул для ковариантных производных. Вывод правил преобразования компонент тензора кручения. Доказательство свойств тензора кручения
18	Доказательство свойств геодезических линий. Построение геодезических линий для заданных поверхностей
19	Вывод правил преобразования компонент тензора Римана-Кристоффеля. Доказательство свойств тензора Римана-Кристоффеля. Доказательство тождества Бьянки
20	Доказательство формулы согласованности связности и объема. Вычисление длин и углов на заданных двумерных поверхностях как римановых пространствах
21	Вычисление кривизны и кручения для кривых в трехмерном евклидовом пространстве, заданных различными способами
22	Вычисление первой квадратичной формы для поверхностей, заданных в трехмерном евклидовом пространстве. Проверка разворачиваемости этих поверхностей. Вычисление гауссовой и геодезической кривизны. Вычисление площадей на поверхностях
23	Построение нормалей к заданным поверхностям, вычисление второй квадратичной формы поверхностей, заданных в трехмерном евклидовом пространстве
24	Вычисление нормальной кривизны заданных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Нахождение геодезических линий. исследование свойств геодезических

№ п.п.	Наименование темы практического (семинарского) занятия
	линий
25	Исследование заданных в трехмерном евклидовом пространстве поверхностей, классификация их точек. Построение асимптотических линий на заданных поверхностях

5. Организационно-педагогические условия

5.1. Образовательные технологии, используемые для формирования компетенций

Проведение лекционных занятий по дисциплине основывается на активном методе обучения, при котором учащиеся не пассивные слушатели, а активные участники занятия, отвечающие на вопросы преподавателя. Вопросы преподавателя нацелены на активизацию процессов усвоения материала, а также на развитие логического мышления. Преподаватель заранее намечает список вопросов, стимулирующих ассоциативное мышление и установление связей с ранее освоенным материалом.

Практические занятия проводятся на основе реализации метода обучения действием: определяются проблемные области, формируются группы. При проведении практических занятий преследуются следующие цели: применение знаний отдельных дисциплин и креативных методов для решения проблем и принятия решений; отработка у обучающихся навыков командной работы, межличностных коммуникаций и развитие лидерских качеств; закрепление основ теоретических знаний.

При проведении учебных занятий используются интерактивные лекции, групповые дискуссии, ролевые игры, тренинги и анализ ситуаций и имитационных моделей.

5.2. Методические указания для обучающихся по изучению дисциплины

При изучении дисциплины обучающимся целесообразно выполнять следующие рекомендации:

1. Изучение учебной дисциплины должно вестись систематически.
2. После изучения какого-либо раздела по учебнику или конспектным материалам рекомендуется по памяти воспроизвести основные термины, определения, понятия раздела.
3. Особое внимание следует уделить выполнению отчетов по практическим занятиям, индивидуальным комплексным заданиям на самостоятельную работу.
4. Вся тематика вопросов, изучаемых самостоятельно, задается на лекциях преподавателем. Им же даются источники (в первую очередь вновь изданные в периодической научной литературе) для более детального понимания вопросов, озвученных на лекции.

6. Перечень учебно-методического и информационного обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Печатная учебно-методическая литература

№ п/п	Библиографическое описание (автор, заглавие, вид издания, место, издательство, год издания, количество страниц)	Количество экземпляров в библиотеке
1. Основная литература		
1	Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию : учебное пособие для вузов. Москва : Физматлит, 2009. 352 с.	1

2	Блашке В. Введение в дифференциальную геометрию : пер. с нем. 2-е изд., испр. и доп. Ижевск : Регуляр. и хаот. динамика, 2000. 231 с.	2
3	Картан Э. Ж. Геометрия римановых пространств : пер. с фр. 2-е изд., испр. и доп. Москва Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2012. 431 с. 25,11 усл. печ. л.	1
4	Компьютерная геометрия : учебное пособие для вузов / Голованов Н. Н., Ильютко Д. П., Носовский Г. В., Фоменко А. Т. М. : Академия, 2006. 511 с.	1
5	Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии : учебник. 3-е изд., перераб. и доп. Санкт-Петербург [и др.] : Лань, 2010. 502 с.	27
6	Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология : дополнительные главы. Москва : изд-во МГУ, 1983. 216 с.	2
2. Дополнительная литература		
2.1. Учебные и научные издания		
1	Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. 3-е изд., стер. Москва : Регуляр. и хаот. динамика : Изд-во МЦНМО, 2002. 399 с.	1
2	Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник для университетов. 3-е изд., перераб. Москва : Наука, 1972. 496 с. 31 усл. печ. л.	1
3	Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия. Первое знакомство. Москва : Изд-во МГУ, 1990. 384 с.	16
4	Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. 2-е изд. Москва : Наука, 1964. 664 с.	1
2.2. Периодические издания		
	Не используется	
2.3. Нормативно-технические издания		
	Не используется	
3. Методические указания для студентов по освоению дисциплины		
	Не используется	
4. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студента		
	Не используется	

6.2. Электронная учебно-методическая литература

Вид литературы	Наименование разработки	Ссылка на информационный ресурс	Доступность (сеть Интернет / локальная сеть; авторизованный / свободный доступ)
Дополнительная литература	Введение в математическое моделирование: Учеб. пособие / Под ред. П.В. Трусова. — М.: Университетская книга, Логос, 2007. - 440 с. ISBN 978-5-98704-037-X.	http://www.mmsp.pstu.ru/userfiles/Posobie/MM_intro_PVTrusov.pdf	сеть Интернет; свободный доступ

6.3. Лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение, используемое при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Вид ПО	Наименование ПО
Операционные системы	Windows 10 (подп. Azure Dev Tools for Teaching)
Офисные приложения.	Microsoft Office Professional 2007. лиц. 42661567
Прикладное программное обеспечение общего назначения	Dr.Web Enterprise Security Suite, 3000 лиц, ПНИПУ ОЦНИТ 2017
Прикладное программное обеспечение общего назначения	Mathematica Professional Version (лиц. L3263-7820*)

6.4. Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Наименование	Ссылка на информационный ресурс
База данных научной электронной библиотеки (eLIBRARY.RU)	https://elibrary.ru/
Научная библиотека Пермского национального исследовательского политехнического университета	http://lib.pstu.ru/
Электронно-библиотечная система Лань	https://e.lanbook.com/
Электронно-библиотечная система IPRbooks	http://www.iprbookshop.ru/
Виртуальный читальный зал Российской государственной библиотеки	https://dvs.rsl.ru/
Информационные ресурсы Сети КонсультантПлюс	http://www.consultant.ru/

7. Материально-техническое обеспечение образовательного процесса по дисциплине

Вид занятий	Наименование необходимого основного оборудования и технических средств обучения	Количество единиц
Лекция	Аудитории, оборудованные ноутбуком, видеопроектором	1
Практическое занятие	Аудитории, оборудованные ноутбуком, видеопроектором	1

8. Фонд оценочных средств дисциплины

Описан в отдельном документе

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
**«Пермский национальный исследовательский
политехнический университет»**

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине
**«Алгебра и геометрия 2. Дифференциальная геометрия
и основы топологии»**

Приложение к рабочей программе дисциплины

Направление подготовки:	01.03.02 Прикладная математика и информатика
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математическое моделирование
Квалификация выпускника:	«Бакалавр»
Выпускающая кафедра:	Математическое моделирование систем и процессов
Форма обучения:	Очная
Курс: 3	Семестр: 5, 6
Трудоёмкость:	
Кредитов по рабочему учебному плану:	5 3Е
Часов по рабочему учебному плану:	180 ч.
Форма промежуточной аттестации:	
Зачет: 5 семестр	Дифференцированный зачет: 6 семестр

Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине является частью (приложением) к рабочей программе дисциплины. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине разработан в соответствии с общей частью фонда оценочных средств для проведения промежуточной аттестации основной образовательной программы, которая устанавливает систему оценивания результатов промежуточной аттестации и критерии выставления оценок. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине устанавливает формы и процедуры текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине.

1. Перечень контролируемых результатов обучения по дисциплине, объекты оценивания и виды контроля

Согласно РПД освоение учебного материала дисциплины запланировано в течение двух семестров (5 и 6 семестры учебного плана) и разбито на 4 учебных модуля. В каждом модуле предусмотрены аудиторские лекционные и практические занятия, а также самостоятельная работа студентов. В рамках освоения учебного материала дисциплины формируются компоненты компетенций *знать, уметь, владеть*, указанные в РПД, которые выступают в качестве контролируемых результатов обучения (табл. 1.1).

Контроль уровня усвоенных знаний, освоенных умений и приобретенных владений осуществляется в рамках текущего, рубежного и промежуточного контроля при изучении теоретического материала, зачета и дифференцированного зачета. Виды контроля сведены в таблицу 1.1.

Таблица 1.1. Перечень контролируемых результатов обучения по дисциплине

Контролируемые результаты обучения дисциплине (ЗУВы)	Вид контроля			
	Текущий	Рубежный	Промежуточный	
	ТПЗ	Т/КР	Зачет	Дифф. зач.
Усвоенные знания				
3.1. Определения и свойства топологических пространств, многообразий, касательных расслоений, строение многообразий	+	Т	+	+
3.2. Виды вводимых на многообразиях структур и приобретаемые вследствие этого свойства (от топологических до Римановых пространств)	+	Т	+	+
3.3. Определения и свойства кривых на многообразиях, гиперповерхностей, векторов и тензоров на многообразиях, внешних форм, их свойств и операций над ними, включая производную Ли, внешнюю производную, градиент, абсолютную производную	+	Т	+	+
3.4. Основы теории кривых и поверхностей в трехмерном пространстве	+	Т		+
Освоенные умения				
У.1. Применять основные понятия дифференциально-геометрического происхождения для описания свойств и структуры произвольных многообразий		КР	+	+
У.2. Использовать теорию внешних форм для исследования дифференцируемых многообразий, находить производные Ли, абсолютную производную, градиент от различных тензоров и полилинейных форм		КР	+	+
У.3. Применять обобщенную теорему Стокса и следствия из нее		КР		+

для различных многообразий				
У.4. Работать с аффинной связностью, определять тензор кручения, Римана-Кристоффеля, исследовать геометрический смысл дифференциальных операторов на многообразиях		КР		+
У.5. Описывать свойства кривых и поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве		КР		+
Приобретенные владения				
В.1. Навыками работы с векторами, тензорами, внешними формами на произвольных многообразиях		КР	+	+
В.2. Навыками применения теории внешних форм, работы с производными Ли, абсолютной производной, градиентом от тензоров и полилинейных форм		КР	+	+
В.3. Навыками применения обобщенной теоремы Стокса и следствий из нее		КР		+
В.4. Навыками исследования кривых и поверхностей как Римановых пространств, вложенных в трехмерное евклидово пространство		КР		+

ТПЗ – текущая проверка знаний (летучки на лекциях по пройденному материалу); Т/КР – рубежное тестирование / контрольная работа.

Итоговой оценкой результатов обучения по дисциплине является промежуточная аттестация в виде дифференцированного зачета, проводимая с учетом результатов текущего и рубежного контроля.

2. Виды контроля, типовые контрольные задания и шкалы оценивания результатов обучения

Текущий контроль успеваемости имеет целью обеспечение максимальной эффективности учебного процесса, управление процессом формирования заданных компетенций обучаемых, повышение мотивации к учебе и предусматривает оценивание хода освоения дисциплины. В соответствии с Положением о проведении текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, специалитета и магистратуры в ПНИПУ предусмотрены следующие виды и периодичность текущего контроля успеваемости обучающихся:

- входной контроль, проверка исходного уровня подготовленности обучаемого и его соответствия предъявляемым требованиям для изучения данной дисциплины;

- текущий контроль усвоения материала (уровня освоения компонента «знать» заданных компетенций) на каждом групповом занятии и контроль посещаемости лекционных занятий;

- промежуточный и рубежный контроль освоения обучаемыми отдельных компонентов «знать», «уметь» заданных компетенций путем компьютерного или бланочного тестирования, контрольных опросов, контрольных работ (индивидуальных домашних заданий), защиты отчетов по лабораторным работам, рефератов, эссе и т.д.

Рубежный контроль по дисциплине проводится на следующей неделе после прохождения модуля дисциплины, а промежуточный – во время каждого контрольного мероприятия внутри модулей дисциплины;

- межсессионная аттестация, единовременное подведение итогов текущей успеваемости не менее одного раза в семестр по всем дисциплинам для каждого направления подготовки (специальности), курса, группы;

- контроль остаточных знаний.

2.1. Текущий контроль усвоения материала

Текущий контроль уровня усвоенных знаний по частям дисциплинарных компетенций (табл. 1.1) в форме письменных теоретических опросов (летучек) проводится по каждой теме. Результаты по 4-балльной шкале оценивания заносятся в книжку преподавателя и учитываются в виде интегральной оценки при проведении промежуточной аттестации.

2.2. Рубежный контроль

Рубежный контроль для комплексного оценивания усвоенных знаний, освоенных умений и приобретенных владений (табл. 1.1) проводится в форме рубежных контрольных работ и тестирования (после изучения каждого модуля учебной дисциплины).

2.2.1. Рубежная контрольная работа

Согласно РПД запланировано 4 рубежные контрольные работы (КР) после освоения студентами учебных модулей дисциплины.

Модуль 1. Основы топологии, отображения топологических пространств.

Раздел 1. Основы топологии

Раздел 2. Непрерывное отображение в топологических пространствах.

(1 контрольная работа)

Модуль 2. Дифференцируемое многообразие. Векторные и тензорные поля на многообразиях.

Раздел 1. Дифференцируемое многообразие

Раздел 2. Векторные и тензорные поля на многообразиях

(2 контрольная работа)

Модуль 3. Дополнительные структуры на дифференцируемых многообразиях.

Раздел 1. Простые дифференциальные структуры на дифференцируемых многообразиях

Раздел 2. Аффинная связность на многообразии

(3 контрольная работа)

Модуль 4. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей.

Раздел 1. Теория кривых в Римановом пространстве

Раздел 2. Поверхности в трехмерном пространстве

(4 контрольная работа)

Типовые задания первой КР:

Контрольная работа – 1. Вариант I

ДГТ

1. Определение топологического пространства, примеры. Теорема об открытом множестве. Свойства внутренностей.
2. Связность топологических пространств, определение, примеры. Теорема о непрерывном отображении связного топологического пространства.
3. Однозначное отображение. Свойства образов и прообразов.
4. Построить топологию τ_X такую, что все отображения $X \rightarrow Y$ непрерывны. Найти такую топологию τ_Y , что все отображения $X \rightarrow Y$ непрерывны.
5. Проверить, является ли эллипс дифференцируемым многообразием.

Контрольная работа – 1. Вариант II

ДГТ

1. Определение замыкания множества, примеры. Теорема о замыкании. Свойства замыканий.
2. Аксиомы отделимости, компактность топологий.
3. Топологическое многообразие. Преобразование координат. Дифференцируемое C^k -многообразие.
4. Доказать, что топология Зарисского является топологией, установить тип топологического пространства, к которому она относится.
5. Рассмотреть синусоиду как множество в пространстве AE^2 и выяснить, является ли это множество топологическим пространством, многообразием, дифференцируемым или нет.

Типовые задания второй КР:

Контрольная работа – 2. Вариант I

ДГТ

1. Производная Ли от внешней формы, определение, свойства. Коммутация с внешней производной.
2. Точные и замкнутые формы и их связь. Примеры. Лемма Пуанкаре (с доказательством).
3. Объем подобласти многообразия. Интеграл от внешней формы.
4. Показать, что формула Грина в AE^3 является частным случаем теоремы Стокса.
5. Записать в AE^3 в компонентах выражение $\hat{\omega}^2 \wedge \hat{a}$. Сколько получится независимых компонент?

Контрольная работа – 2. Вариант II

ДГТ

1. Производная Ли от функции и векторного поля. Определение, свойства.
2. Теорема Стокса (с доказательством).
3. Определение p -векторов и внешних q -форм. Отображение дуализации.
4. Доказать, что производная Ли и внешняя производная коммутируют.
5. Найти формы, дуальные векторному и тензорному произведению двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} в AE^3 .

Типовые задания третьей КР:

Контрольная работа – 3. Вариант I

ДГТ

1. Риманово пространство: определение, свойства.
2. Уравнения геодезической линии. Свойства геодезических линий. Геодезические линии в AE^n .
3. Тензор Римана-Кристоффеля: определение, геометрический смысл, свойства.
4. Записать в компонентной форме абсолютную производную 2-формы.
5. Показать, что "единичные" базисные векторные поля для полярных координат на евклидовой плоскости, определяемые формулами:

$$\vec{r} = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}, \quad \vec{\theta} = -\sin \theta \vec{x} + \cos \theta \vec{y},$$

где $\vec{x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $\vec{y} \equiv \frac{\partial}{\partial y}$, образуют некоординатный базис.

Контрольная работа – 3. Вариант II

ДГТ

1. Определение аффинной связности. Абсолютные производные от функции и вектора, их свойства.
2. Тензор кручения. Симметричная связность.
3. Согласованность связности и объема. Согласованность связности и метрики.
4. Показать, что формула Грина является частным случаем теоремы Стокса.
5. Пусть на евклидовой плоскости заданы полярные координаты r и θ . Найти компоненты метрики в базисе $\{\partial/\partial r, \partial/\partial \theta\}$, а также в базисе векторных полей, определяемых формулами:

$$\vec{r} = \cos \theta \vec{x} + \sin \theta \vec{y}, \quad \vec{\theta} = -\sin \theta \vec{x} + \cos \theta \vec{y},$$

где $\vec{x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}$, $\vec{y} \equiv \frac{\partial}{\partial y}$. Выразить $\{\vec{r}, \vec{\theta}\}$ через $\{\partial/\partial r, \partial/\partial \theta\}$.

Типовые задания четвертой КР:

Контрольная работа – 4. Вариант I

ДГТ

1. Кривые на многообразии. Формулы Френе в пространстве AE^n . Натуральные уравнения кривой, примеры.
2. Доказать, что при любой параметризации сферы ее первая квадратичная форма пропорциональна второй квадратичной форме, а при любой параметризации плоскости ее вторая квадратичная форма равна нулю.
3. Вывести формулу для определения кривизны плоской кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.
4. Найти кривизну линий, заданных уравнениями $(x/a)^2 \pm (y/b)^2 = 1$.
5. Поверхность задается системой уравнений $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$. Вычислить главные кривизны этой поверхности в точке $u = 1$, $v = 1$, найти гауссову и среднюю кривизну в той же точке.

Контрольная работа – 4. Вариант II

ДГТ

1. Доказать, что если в некоторой точке кривой кривизна и кручение отличны от нуля, то части кривой, соединяющиеся в этой точке, лежат вблизи нее по разные стороны от соприкасающейся плоскости.
2. Поверхность как двумерное риманово пространство. Измерения на поверхности, формулы для длин отрезков кривых на поверхности и углов между векторами.
3. Формулы Френе для плоской кривой в ДОСК, и в полярной системе координат.
4. Найти касательный вектор, нормали кривизну кардиоиды $r = 2a(1 - \cos \varphi)$.
5. Вычислить главные кривизны поверхности $x^2/p + y^2/q = 2z$ в точке $(0, 0, 0)$, найти гауссову и среднюю кривизну в той же точке.

Типовые шкала и критерии оценки результатов рубежной контрольной работы приведены в общей части ФОС образовательной программы.

2.3. Промежуточная аттестация (итоговый контроль)

Допуск студента к промежуточной аттестации осуществляется по результатам текущего и рубежного контроля. Условиями допуска являются успешная сдача 80% практических заданий и положительная интегральная оценка по результатам текущего и рубежного контроля.

Промежуточная аттестация по дисциплине проводится согласно РПД в виде двух зачетов. Зачеты проводятся в виде теста.

2.3.1. Типовые вопросы и задания для экзамена по дисциплине

Вариант теста для зачета по дисциплине (1 семестр)

Вопросы I уровня: простейшие понятийные вопросы по всему курсу

(1 правильный ответ — 1 балл).

Вопросы II уровня: идеи, уравнения, некоторые задачи и теоремы

(1 правильный ответ — 1.5 балла).

Для зачета необходимо набрать **25 баллов**.

I уровень

1. Как определяется открытое множество в метрическом пространстве и в топологическом?
2. Чему равно пересечение всех топологий в AE^3 ?
3. Как вводится замкнутое множество в топологическом пространстве?
4. Удовлетворяют ли замкнутые множества системе аксиом топологического пространства?
5. Пусто ли множество $[A] \setminus A$, если A — открыто?
6. Найти ошибки:
 - а) точка x_0 является внутренней для множества A , если любая ее окрестность целиком лежит в A ,
 - б) точка x_0 является изолированной точкой для множества A , если для любой ее окрестности $V(x_0)$ справедливо, что $V(x_0) \cap A = x_0$,
 - в) точка x_0 является предельной точкой для множества A , если существуют такая ее окрестность $V(x_0)$ и точка $y \neq x_0$, что $y \in V(x_0) \cap A$.
7. Выберите топологическое пространство, которое является компактным: а) числовая плоскость с топологией Зарисского, б) поверхность сферы S^2 в AE^3 , в) числовая прямая с ответвлением.
8. Пусть на дифференцируемом многообразии задан вектор $\bar{\tau}$ (как определяется?) и система координат x^i . Как найти компоненты вектора $\bar{\tau}$ в этой системе координат?
9. Можно ли причесать одномерного ежа S^1 в AE^3 ? Причесать означает расположить все касательные векторы многообразия параллельно.
10. Чему равно выражение $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$, если $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$ — символы Леви-Чивиты?
11. Записать матрицу компонент внешней формы $\hat{a} \wedge \hat{b}$ в AE^2 и в AE^3 .
12. Найти внешнюю производную $\hat{d} \wedge \hat{\omega}^3$ в AE^3 .
13. Найти дуализацию $*(\hat{d} \wedge \hat{a})$ в AE^2 , где \hat{a} — линейная форма.
14. Пусть на многообразии задана форма объема $\hat{\omega}^n$. Как найти объем, построенный на векторах базиса?
15. Охарактеризуйте систему двух конгруэнций векторных полей \bar{a} и \bar{b} на многообразии, если известно, что их скобка Ли отлична от нуля: $[\bar{a}, \bar{b}] \neq \bar{0}$.

II уровень

1. Можно ли снять с человека надетый на него «восковий» свитер, не изменяя его топологического строения, если у человека сцеплены руки? Объяснить.
2. Является ли пара $\{X, \tau\}$ топологическим пространством, если
 - 1) $X = \{x, y, z\}$, $\tau = \{\emptyset, \{x, y, z\}, \{x\}, \{y\}\}$,
 - 2) $X = \{x, y, z\}$, $\tau = \{\emptyset, \{x, y, z\}, \{x, y\}, \{y\}\}$?
3. Кривая в AE^3 задается системой уравнений $\begin{cases} z - 3 \sin x = 0, \\ y + \cos x = 0. \end{cases}$ Проверить, является ли она гладким многообразием.
4. Пусть a_i^j — компоненты матрицы преобразования базисных векторов на многообразии.

Запишите закон преобразования компонент вектора при таком преобразовании.

5. Как определяется базис в сопряженном касательном пространстве? Доказать линейную независимость его элементов.
6. Показать, что «единичные» базисные векторные поля для полярных координат на евклидовой плоскости, определяемые формулами

$$\bar{\mathbf{r}} = \cos \theta \bar{\mathbf{x}} + \sin \theta \bar{\mathbf{y}},$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \bar{\mathbf{x}} + \cos \theta \bar{\mathbf{y}},$$
 где $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x}$ и $\bar{\mathbf{y}} = \frac{\partial}{\partial y}$, образуют некоординатный базис. Найти конгруэнцию векторных полей $\bar{\mathbf{r}}$ и $\bar{\boldsymbol{\theta}}$.
7. Чему равно выражение $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} A_i^{j_1} A_{i_2}^{j_2} \dots A_{i_n}^{j_n}$, если $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$ — символы Леви-Чивиты?
8. Преобразовать внешнюю производную внешнего произведения $\hat{d} \wedge (\hat{a} \wedge \hat{b}^2)$.
9. Найти альтернирование ковариантной производной $\nabla_{[i} a_{j]}$ в пространстве AE^n .
10. Упростить интеграл внешней 2-формы $\hat{\omega}^2 = \hat{d} \wedge \hat{a}$ по поверхности единичного куба в AE^3 , где \hat{a} — 1-форма.

Вариант теста для дифференцированного зачета (2 семестр)

Вопросы I уровня: простейшие понятийные вопросы по всему курсу

(1 правильный ответ — 1 балл).

Вопросы II уровня: идеи, уравнения, некоторые задачи и теоремы

(1 правильный ответ — 1.5 балла).

Для оценки «отлично» необходимо набрать **55 баллов** и более,
 для оценки «хорошо» необходимо набрать **45 баллов** и более,
 для оценки «удовлетворительно» необходимо набрать **35 баллов** и более,
 при сумме **менее 35 баллов** — оценка «неудовлетворительно».

I уровень

1. Будет ли топологией объединение всех топологий в AE^2 ?
2. Доказать, что замыкание связного множества связно.
3. Удовлетворяют ли замкнутые множества системе аксиом топологического пространства?
4. Может ли множество быть одновременно открытым и замкнутым?
5. Пусто ли множество $[F] \setminus F$, если F — замкнуто?
6. Какая топология на числовой прямой будет слабее топологии Зарисского?
7. Выберите пространство, которое является компактным: а) числовая плоскость с топологией Зарисского, б) поверхность сферы S^2 в AE^3 , в) поверхность параболоида вращения в AE^3 , г) числовая прямая с ответвлением.
8. Являются ли многообразиями следующие множества:
 - a. линейное пространство \mathbb{R}^n или его область,
 - b. сфера S^n , заданная в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n+1} уравнением $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$,
 - c. тор $T^2 = S^1 \times S^1$ в \mathbb{R}^n (чему равно n ?),
 - d. проективное пространство $\mathbb{R}P^n = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n)\}$, элементами которого являются прямые, проходящие через начало координат в \mathbb{R}^{n+1} . Каждая такая прямая задается любой своей отличной от нуля точкой (x_0, x_1, \dots, x_n) , координаты которой называются однородными координатами элемента проективного пространства,
 - e. два координатных множества $\mathbb{R} = \{x\}$ и $\mathbb{R} = \{y\}$, точки которых с равными отрицательными координатами совпадают.
9. Как установить гомеоморфизм между следующими многообразиями? Как они называются?



10. Пусть \bar{e}_i — базисный вектор в касательном пространстве, а \hat{e}^i — базисный элемент в сопряженном касательном пространстве в той же точке многообразия. Чему равна свертка $\hat{e}^i(\bar{e}_j)$? Как ее представить AE^3 ?
11. Привести пример суммы тензоров типа $\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$?
12. Можно ли причесать двумерного ежа S^2 в \mathbb{R}^3 ? Причесать означает расположить все касательные векторы многообразия параллельно.
13. Чему равно выражение $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1 i_2 \dots i_n}$, если $A_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} = A_{i_2 i_1 i_3 \dots i_n}$, а $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$ — символы Леви-Чивиты?
14. Записать матрицу компонент внешней формы $\hat{\omega}^2$ в AE^2 и в AE^3 .
15. Найти дуализацию $*(\hat{d} \wedge \hat{d} \wedge \alpha)$ в AE^3 , где α — 0-форма.
16. Пусть на многообразии задана форма объема $\hat{\omega}^n$. Как найти объем, построенный на векторах базиса $\bar{e}_i, i = \overline{1, n}$?
17. Охарактеризуйте систему двух конгруэнций векторных полей \bar{a} и \bar{b} на многообразии, если известно, что их скобка Ли отлична от нуля: $[\bar{a}, \bar{b}] \neq \bar{0}$.
18. Изобразите схематично Ли-инвариантную скалярнозначную функцию.
19. Записать в компонентах производную Ли $\mathcal{L}_{\bar{v}} \bar{e}_i$ от базисного вектора \bar{e}_i .
20. Записать в компонентной форме абсолютную производную $\nabla_{\bar{v}} \bar{v}$ векторного поля \bar{v} в координатном базисе.
21. Записать в компонентах уравнение геодезической линии в AE^n (ДОСК).
22. Могут ли пересекаться геодезические линии?
23. Чему равен тензор кручения для сферы S^2 в AE^3 ?
24. Пусть на двумерном многообразии задан метрический тензор (билинейная форма). Как определить элементарную площадь dS , построенную с помощью малых приращений вдоль координатных линий?
25. Как вычислить расстояние между двумя точками в римановом пространстве?
26. Определить координатные линии для геликоида $\bar{r} = \{u \cos v; u \sin v; av\}$, $a = const$.
27. Указать главные направления кривизны на бесконечном круговом цилиндре.
28. Чему равно скалярное произведение $\bar{\tau} \cdot \nabla_{\bar{v}} \bar{\tau}$, где $\bar{\tau}$ — касательный вектор к кривой?
29. Изобразить кривую, кривизна которой $k = const \neq 0$ и кручение $\kappa = const \neq 0$.
30. Кривая лежит на поверхности бесконечного кругового цилиндра и имеет постоянную кривизну. Найдите эту кривую.

II уровень

1. Является ли пара $\{X, \tau\}$ топологическим пространством, если
 - f. $X = \{x, y\}, \tau = \{\emptyset, \{x, y\}, \{x\}\}$,
 - g. $X = \{x, y, z\}, \tau = \{\emptyset, \{x, y, z\}, \{y\}\}$,
 - h. $X = \{x, y, z\}, \tau = \{\emptyset, \{x, y, z\}, \{x\}, \{y\}\}$,
 - i. $X = \{x, y, z\}, \tau = \{\emptyset, \{x, y, z\}, \{x, y\}, \{y\}\}$?
2. Кривая в AE^3 задается системой уравнений $\begin{cases} z - 3 \sin x = 0, \\ y + \cos x = 0. \end{cases}$. Проверить, является ли она гладким многообразием.
3. Будет ли связно множество точек, задаваемое в \mathbb{R}^3 уравнением $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = C, C \neq 0$?

4. Пусть a_i^j — компоненты матрицы преобразования базисных векторов на многообразии. Запишите закон преобразования компонент вектора при таком преобразовании.
5. Как определяется базис в сопряженном касательном пространстве? Доказать линейную независимость его элементов.
6. Показать, что «единичные» базисные векторные поля для полярных координат на евклидовой плоскости, определяемые формулами

$$\bar{\mathbf{r}} = \cos \theta \bar{\mathbf{x}} + \sin \theta \bar{\mathbf{y}}, \quad \bar{\boldsymbol{\theta}} = -\sin \theta \bar{\mathbf{x}} + \cos \theta \bar{\mathbf{y}},$$
 где $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial x}$ и $\bar{\mathbf{y}} = \frac{\partial}{\partial y}$, образуют некоординатный базис. Найти конгруэнцию векторных полей $\bar{\mathbf{r}}$ и $\bar{\boldsymbol{\theta}}$.
7. Записать разложение внешнего произведения $\hat{\omega}_1^2 \wedge \hat{\omega}_2^3$ по базисным элементам с помощью формулы для внешнего произведения внешних форм и напрямую. Упростить.
8. Преобразовать внешнюю производную внешнего произведения $\hat{d} \wedge (\hat{a} \wedge \hat{b}^2)$.
9. Найти внешнюю производную $\hat{d} \wedge \hat{\omega}$ формы $\hat{\omega} = P\hat{d}x^1 \wedge \hat{d}x^2 - Q\hat{d}x^1 \wedge \hat{d}x^3 + R\hat{d}x^2 \wedge \hat{d}x^3$, где P, Q, R — функции координат x^i .
10. Если существует ненулевая внешняя форма $\hat{\omega}^p$ такая, что для системы векторов $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_p$ на многообразии $\hat{\omega}^p(\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_p) \neq 0$, то что можно сказать об этих векторах?
11. Упростить интеграл внешней 2-формы $\hat{\omega}^2 = \hat{d} \wedge \hat{a}$ по поверхности единичного куба в AE^3 , где \hat{a} — 1-форма.
12. Найти альтернирование ковариантной производной $\nabla_{[i} a_{j]}$ в пространстве метрической связности.
13. Записать в компонентах ковариантные производные $\nabla_i v^j$ и векторного поля $\bar{\mathbf{v}}$ и поля линейной формы.
14. Осуществим параллельный перенос вектора по поверхности земного шара по маршруту Пермь, Гонолулу, Владивосток, Пермь. Изменится ли этот вектор? О чем это говорит?
15. Найти метрический тензор для сферы и длину вектора $\{1;1\}$ на экваторе и на полюсе.
16. Найти метрический тензор для геликоида $\bar{\mathbf{r}} = \{u \cos v; u \sin v; av\}$, $a = const$.
17. Найти угол между линиями кривизны на круговом цилиндре.
18. Найти нормальные кривизны поверхности вдоль ее координатных линий x^i , если матрица компонент первой квадратичной формы имеет диагональный вид, матрица компонент второй квадратичной формы имеет недиагональный вид.
19. Доказать, что для компонент второй квадратичной формы справедливо: $\bar{\mathbf{n}}_{,\alpha} \cdot \bar{\mathbf{e}}_\beta = -\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{e}}_{\alpha,\beta}$.
20. Найти вторую квадратичную форму для геликоида $\bar{\mathbf{r}} = \{u \cos v; u \sin v; av\}$, $a = const$.

2.3.2. Шкалы оценивания результатов обучения на дифференцированном зачете

Оценка результатов обучения по дисциплине в форме уровня сформированности компонентов *знать, уметь, владеть* заявленных компетенций проводится по 4-х балльной шкале оценивания путем выборочного контроля во время экзамена.

Типовые шкала и критерии оценки результатов обучения при сдаче дифференцированного зачета для компонентов *знать, уметь и владеть* приведены в общей части ФОС образовательной программы.

3. Критерии оценивания уровня сформированности компонентов и компетенций

3.1. Оценка уровня сформированности компонентов компетенций

При оценке уровня сформированности компетенций в рамках выборочного контроля при дифференцированном зачете считается, что *полученная оценка за компонент проверяемой в билете компетенции обобщается на соответствующий компонент всех компетенций, формируемых в рамках данной учебной дисциплины.*

Типовые критерии и шкалы оценивания уровня сформированности компонентов компетенций приведены в общей части ФОС образовательной программы.

3.2. Оценка уровня сформированности компетенций

Общая оценка уровня сформированности всех компетенций проводится путем агрегирования оценок, полученных студентом за каждый компонент формируемых компетенций, с учетом результатов текущего и рубежного контроля в виде интегральной оценки по 4-х балльной шкале. Все результаты контроля заносятся в оценочный лист и заполняются преподавателем по итогам промежуточной аттестации.

Форма оценочного листа и требования к его заполнению приведены в общей части ФОС образовательной программы.

При формировании итоговой оценки промежуточной аттестации в виде дифференцированного зачета используются типовые критерии, приведенные в общей части ФОС образовательной программы.